

Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
22 Januari 2007, 09.00–12.00 uur

1. Beschouw het Cauchy probleem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2, \quad u(x, y) = 1 \quad \text{als} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

- (a) Toon aan dat dit probleem niet goed gesteld is.
Aanwijzing: beschouw de karakteristieken.
- (b) Maak het probleem goed gesteld door de waarde slechts op een stuk van de cirkel voor te schrijven.
- (c) Geef in dit laatste geval de oplossing $u(s, \tau)$, en, zo mogelijk, $u(x, y)$.

2. Beschouw voor $0 \leq \alpha < c$ de gedempte golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t},$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Substitueer $u(x, t) = X(x)T(t)$.

- (a) Toon aan dat dezelfde eigenwaarden k^2 en eigenfuncties $\sin kx$ optreden met $k \in \mathbb{N}$ als bij het ongedempte geval $\alpha = 0$.
- (b) Bepaal voor $k \in \mathbb{N}$ de bijbehorende vergelijking voor $T(t)$.
- (c) Laat zien dat de algemene oplossing voor $u(x, t) = X(x)T(t)$ bij $k \in \mathbb{N}$ gegeven wordt door

$$e^{-\alpha t} \left[a_k \cos \sqrt{k^2 c^2 - \alpha^2} t + b_k \sin \sqrt{k^2 c^2 - \alpha^2} t \right] \sin kx.$$

- (d) Bepaal de coëfficiënten a_k en b_k .

3. Beschouw de warmte-geleidingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = a, & u(\pi, t) = b, & t > 0. \end{cases}$$

zie ommezijde

- (a) Laat zien dat de vergelijking en de randvoorwaarden vereenvoudigd kunnen worden door een geschikte keuze van $w(x)$ in de substitutie $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$.
- (b) Geef de oplossing van het oorspronkelijke probleem voor $t \rightarrow \infty$. Beargumenteer het antwoord.
4. Bepaal u als oplossing van de Laplace vergelijking in \mathbb{R}^2 die begrensd is op $x^2 + y^2 \leq 1$, als gegeven is dat u radiaal-symmetrisch is, dat wil zeggen alleen van $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ afhangt.
Aanwijzing: Laat zien dat met $u(x, y) = G(r)$ geldt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G''(r) + \frac{1}{r}G'(r), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$